第39講　整数問題 Part II

39　x，y，a，b を整数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ が成り立ち，x と y の最大公約数を G，a と b の最大公約数を g とする．このとき，$g \leqq G \leqq 9g$ であることを示せ．

(2)　$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ かつ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ を満たしているとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　整数問題 Part II

39　n が相異なる素数 p，q の積，$n=pq$ であるとき，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ の最大公約数は1であることを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　整数問題 Part II

39　x，y，a，b を整数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ が成り立ち，x と y の最大公約数を G，a と b の最大公約数を g とする．このとき，$g\leqq G\leqq 9g$ であることを示せ．

(2)　$x\geqq 1$ かつ $y\geqq 1$ かつ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ を満たしているとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の最大値を求めよ．

【答】 (1)　略　(2)　$\dfrac{37}{186}$

【解答】

(1)　a と b の最大公約数が g より，互いに素である整数 a'，b' を用いて $a=a'g$，$b=b'g$ と表せるので，$x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ は $x=(2a'-b')g$，$y=(a'+4b')g$ と表せる．これは g が x と y の公約数であることを示している．

x と y の最大公約数が G であるので，$g\leqq G$ となる．

x と y の最大公約数が G より，互いに素である整数 x'，y' を用いて $x=x'G$，$y=y'G$ と表せる．

このとき $x=2a-b$ かつ $y=a+4b$ は $x'G=2a-b$，$y'G=a+4b$ と表せるが，これらより $9a=(4x'+y')G$，$9b=(-x'+2y')G$ を得る．これは G が $9a$ と $9b$ の公約数であることを示している．

ここで $9a$ と $9b$ の最大公約数は $9g$ となるので，$G\leqq 9g$ となる．

以上より $g\leqq G\leqq 9g$ が示された．

(2)　まずは $x\leqq y$ としたものを考える．

$1\leqq x\leqq 5$ とすると $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{5}$ となり不適．よって $x\geqq 6$

$x=6$ のとき，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>30$ であるので，$y=31$ のとき $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{31}=\dfrac{37}{186}$ をとる．

$x=7$ のとき，$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>\dfrac{35}{2}$ であるので，$y=18$ のとき $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{25}{126}$ をとる．

$x=8$ のとき，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>\dfrac{40}{3}$ であるので，$y=14$ のとき $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{11}{56}$ をとる．

$x=9$ のとき，$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>\dfrac{45}{4}$ であるので，$y=12$ のとき $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{7}{36}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x=10$ のとき，$\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{5}$ より $y>10$ であるので，$y=11$ のとき $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{y}$ は最大値 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}=\dfrac{21}{110}$ をとる．

$x\geqq 11$ のとき，$y\geqq x$ であるので，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{11}=\dfrac{2}{11}$ となる．

また，$x\geqq y$ のときも同様である．

以上より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{37}{186}}$ 〔$(x,\ y)=(6,\ 31),\ (31,\ 6)$ のとき〕

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　整数問題 Part II

39　n が相異なる素数 p，q の積，$n=pq$ であるとき，$n-1$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ の最大公約数は 1 であることを示せ．

【答】 略

【解答】

$${}_{pq}\mathrm{C}_p=\frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots\cdots(pq-p+1)}{p!}$$ より

$${}_{pq}\mathrm{C}_p(p-1)!=q(pq-1)(pq-2)\cdots\cdots\{p(q-1)+1\}$$

を得る．ここで

$$pq-\{p(q-1)+1\}=p-1<p$$

より

$$pq-1,\ pq-2,\ \cdots\cdots,\ p(q-1)+1$$

のいずれも p の倍数ではない．

よって「${}_{pq}\mathrm{C}_p$ は p の倍数ではない」 ……①

同様に

$${}_{pq}\mathrm{C}_q(q-1)!=p(pq-1)(pq-2)\cdots\cdots\{(p-1)q+1\}$$
$$pq-\{(p-1)q+1\}=q-1<q$$

より「${}_{pq}\mathrm{C}_q$ は q の倍数ではない」 ……②

また ${}_{pq}\mathrm{C}_1=pq$ より，最大公約数は

$$pq,\ p,\ q,\ 1$$

のいずれかであるが①，②より pq，p，q は最大公約数となれない．よって最大公約数は 1

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。